Koordinator
Konstantin Rusch

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Lösungen 1

1. Wir spielen das Brettspiel „Siedler von Catan". Das Spielbrett besteht aus Landschaften, die mit ganzen Zahlen zwischen 2 und 6 bzw. 8 und 12 versehen sind. In jeder Runde wird mit zwei Würfeln gewürfelt, und diejenigen Landschaften bringen Erträge, deren Zahl mit der Summe der Augenzahlen übereinstimmt.

a) Wähle den Grundraum $\Omega := \{(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Identifiziere das Ereignis „die 9er Landschaften bringen Erträge" mit einer Teilmenge von Ω.

b) Welche Landschaften (d.h. mit welcher Augenzahl) bringen voraussichtlich am häufigsten bzw. am seltensten Ertrag? Warum?

c) Ein Spieler hat die Wahl: Entweder erhält er in der Zukunft den Ertrag einer 8er Landschaft, oder alle Erträge von einer 12er und einer 4er Landschaft. Was soll er wählen und warum? (Wir nehmen an, dass die Charakteristik der Landschaft, d.h. die Sorte der „Rohstoffe", bei der Entscheidung keine Rolle spielt.)

Lösung:

a) Die gesuchte Teilmenge ist

$$\Omega_9 = \{(3, 6),\ (4, 5),\ (5, 4),\ (6, 3)\}.$$

b) Man geht wie folgt vor: Der Grundraum hat 36 Elemente; diese kann man nach Summe der Augenzahlen in 11 Gruppen ($\Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_{12}$) einteilen. Hierbei stehen die Indizes jeweils für die Summe der Augenzahlen. Man zählt dann die Elemente dieser Ω_i und findet $|\Omega_2| = 1$, $|\Omega_3| = 2$, …, $|\Omega_7| = 6$, $|\Omega_8| = 5$, …, $|\Omega_{12}| = 1$.

Je mehr Elemente eine Menge hat, desto häufiger wird die entsprechende Zahl voraussichtlich als Summe der Augenzahlen vorkommen. Mithilfe des Laplace-Modells können wir die Wahrscheinlichkeiten explizit angeben: $P(\Omega_2) = 1/36$, $P(\Omega_3) = 2/36$, …, $P(\Omega_7) = 6/36$, $P(\Omega_8) = 5/36$, …, $P(\Omega_{12}) = 1/36$. Die Antwort ist also: Die ertragreichsten Landschaften sind die 6er bzw. die 8er, und die ärmsten sind die 2er bzw. 12er. Beachte dabei, dass es keine 7er Landschaften gibt.

Siehe nächste Seite!

c) In Anlehnung an Teilaufgabe b) wissen wir $|\Omega_8| = 5$, $|\Omega_4| = 3$ und $|\Omega_{12}| = 1$. Somit kann man folgende Wahrscheinlichkeiten berechnen: $P(\Omega_8) = 5/36$, und da Ω_4 und Ω_{12} disjunkt sind, gilt $P(\Omega_4 \cup \Omega_{12}) = P(\Omega_4) + P(\Omega_{12}) = 4/36$. Da die Wahrscheinlichkeit des Rohstoffeinkommens in der ersten Variante somit höher ist, sollte man diese Variante wählen.

2. Wir betrachten drei zunächst leere Urnen und eine Kugel. Es wird einmalig eine faire Münze geworfen. Erscheint "Zahl", so bleiben die Urnen leer. Erscheint "Kopf", dann wird die Kugel in eine der drei Urnen gelegt; hierbei wird Urne 1 mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ gewählt, Urnen 2 und 3 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1-p}{2}$. Die nachfolgenden Fragen beziehen sich auf den Zustand nach dem obigen Experiment.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in Abhängigkeit von p) befindet sich in Urne 1 eine Kugel?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in Abhängigkeit von p) befindet sich weder in Urne 1 noch in Urne 2 eine Kugel?

c) Wir öffnen nun Urne 1 und sehen, dass sich darin keine Kugel befindet. Gegeben diese Information, mit welcher Wahrscheinlichkeit (in Abhängigkeit von p) befindet sich nun eine Kugel in einer der drei Urnen?

d) Wir öffnen nun zusätzlich Urne 2 und sehen, dass sich auch darin keine Kugel befindet. Gegeben diese Information, mit welcher Wahrscheinlichkeit (in Abhängigkeit von p) befindet sich nun eine Kugel in Urne 3?

Lösung: Sei $K :=$"Münzwurf ergibt 'Kopf' " und $U_i :=$"In Urne i befindet sich eine Kugel", wobei $i = 1, 2, 3$. Aus der Aufgabenstellung ergibt sich $P[K] = P[K^c] = \frac{1}{2}$, $P[U_1 \mid K] = p$, $P[U_i \mid K] = \frac{1-p}{2}$, $i = 2, 3$, sowie $P[U_i \mid K^c] = 0$, $i = 1, 2, 3$.

a) Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$P[U_1] = P[U_1 \mid K]P[K] + P[U_1 \mid K^c]P[K^c] = p \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{p}{2}.$$

b) Beachte, dass U_1, U_2, U_3 paarweise disjunkt sind (in allen drei Urnen zusammen befindet sich höchstens eine Kugel). Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} P[U_1^c \cap U_2^c] &= 1 - P[U_1 \cup U_2] = 1 - [P[U_1] + P[U_2]] \\ &= 1 - [P[U_1] + P[U_2 \mid K]P[K] + P[U_2 \mid K^c]P[K^c]] \\ &= 1 - \left[\frac{p}{2} + \frac{1-p}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2}\right] \\ &= 1 - \frac{1+p}{4} = \frac{3-p}{4}. \end{aligned}$$

Siehe nächste Seite!

Alternativer Lösungsweg:

$$\begin{aligned}P[U_1^c \cap U_2^c] &= P[U_1^c \cap U_2^c \mid K]P[K] + P[U_1^c \cap U_2^c \mid K^c]P[K^c] \\ &= P[U_3 \mid K]P[K] + P[U_1^c \cap U_2^c \mid K^c]P[K^c] \\ &= \frac{1-p}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3-p}{4}.\end{aligned}$$

c) Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit ist $P[K \mid U_1^c]$ $(= P[U_2 \cup U_3 \mid U_1^c])$. Wir können sie mit der Formel von Bayes berechnen:

$$P[K \mid U_1^c] = \frac{P[U_1^c \mid K]P[K]}{P[U_1^c]} = \frac{[1 - P[U_1 \mid K]]P[K]}{1 - P[U_1]} = \frac{[1-p]\frac{1}{2}}{1 - \frac{p}{2}} = \frac{1-p}{2-p}.$$

d) Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit ist $P[U_3 \mid U_1^c \cap U_2^c]$ $(= P[K \mid U_1^c \cap U_2^c])$. Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt (beachte, dass $U_3 \subset U_1^c \cap U_2^c$)

$$P[U_3 \mid U_1^c \cap U_2^c] = \frac{P[U_3 \cap U_1^c \cap U_2^c]}{P[U_1^c \cap U_2^c]} = \frac{P[U_3]}{P[U_1^c \cap U_2^c]}.$$

Analog zu **a**] ist

$$P[U_3] = P[U_3 \mid K]P[K] + P[U_3 \mid K^c]P[K^c] = \frac{1-p}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1-p}{4},$$

und aus **b**] haben wir $P[U_1^c \cap U_2^c] = \frac{3-p}{4}$. Somit ergibt sich weiter:

$$P[U_3 \mid U_1^c \cap U_2^c] = \frac{\frac{1-p}{4}}{\frac{3-p}{4}} = \frac{1-p}{3-p}.$$

3. Für eine externe Benutzergruppe, der auch Urs angehört, stehen an der ETH vier Rechner zur Verfügung, wobei jedem Benutzer beim Einloggen jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/4 unabhängig von den anderen einer der Rechner zugeteilt wird. Es kann also durchaus vorkommen, dass mehrere Leute auf dem gleichen Rechner arbeiten.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine Person auf dem gleichen Rechner arbeitet wie Urs, wenn ausser ihm genau 10 Personen eingeloggt sind?

Tipp: Betrachte S_n als die Zufallsvariable, die die Anzahl der Personen auf Urs' Rechner bei n eingeloggten Personen modelliert.

b) Wieviele Leute dürfen sich ausser Urs noch einloggen, damit er mindestens mit Wahrscheinlichkeit 1/2 allein auf einem Rechner arbeitet?

Siehe nächste Seite!

c) Wir nehmen nun an, dass jeder Rechner unabhängig von den anderen nur mit Wahrscheinlichkeit 0.9 funktioniert, wobei die Benutzer analog wie vorher auf die funktionierenden Rechner "verteilt" werden (d.h. wenn gewisse Rechner nicht funktionieren, werden die Benutzer auf die verbleibenden verteilt). Gegeben, dass ausser Urs drei Leute eingeloggt sind und genau zwei davon auf dem gleichen Rechner arbeiten wie er, wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass alle Rechner funktionieren?

Tipp: Sei X die Anzahl funktionierender Rechner und S_3 die Anzahl der Personen, die ausser Urs auf seinem Rechner arbeiten. Bestimme für $k = 2, 3, 4$ die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(S_3 = 2|X = k)$ aus der Annahme, wie die Benutzer auf die Rechner verteilt werden, und benutze diese Wahrscheinlichkeiten, um mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(S_3 = 2)$ zu berechnen. Mit dem Satz von Bayes erhält man dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Lösung: Es sei S_n die Anzahl der Personen, die auf Urs' Rechner arbeiten (ausser ihm), wenn n Personen (ausser ihm) eingeloggt sind. Dann ist S_n Binomial(n, 1/4) verteilt.

a) Aus $S_{10} \sim Bin(10, 1/4)$ erhalten wir

$$\mathbb{P}(S_{10} \leq 1) = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} + 10\left(\frac{3}{4}\right)^{9}\frac{1}{4} = \frac{3^9 \cdot 13}{4^{10}} = 0.244\ .$$

b) Gesucht wird das grösste n mit $\mathbb{P}(S_n = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \geq \frac{1}{2}$. Beachte, dass die Folge $\mathbb{P}(S_n = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ monoton fallend ist. Da $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} > \frac{1}{2}$ und $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} < \frac{1}{2}$ lautet die Antwort: höchstens 2.

c) Sei X die Anzahl der funktionierenden Rechner. Dann ist $X \sim Bin(4, 0.9)$, das heisst $\mathbb{P}[X = 4] = 0.9^4$, $\mathbb{P}[X = 3] = 4 \cdot 0.9^3 \cdot 0.1$, $\mathbb{P}[X = 2] = 6 \cdot 0.9^2 \cdot 0.1^2$. Weiter gilt $S_n|X = k \sim Bin(n, 1/k)$, also

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_3 = 2|X = 4) &= \binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4} = \frac{9}{64},\\
\mathbb{P}(S_3 = 2|X = 3) &= \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{2}{3} = \frac{2}{9},\\
\mathbb{P}(S_3 = 2|X = 2) &= \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2} = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Der Satz von Bayes liefert nun die gesuchte Wahrscheinlichkeit als

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X = 4|S_3 = 2) =\\
&= \frac{\mathbb{P}(S_3 = 2|X = 4)\mathbb{P}(X = 4)}{\mathbb{P}(S_3 = 2|X = 4)\mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(S_3 = 2|X = 3)\mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(S_3 = 2|X = 2)\mathbb{P}(X = 2)}\\
&= 0.526\ .
\end{aligned}$$

Siehe nächste Seite!

4. Max und Moritz analysieren die Chancen des Fussballclubs Manchester City, das Viertelfinale der Champions League 2020 zu erreichen. Als Abschätzung nehmen die beiden an, dass der Club beide Spiele (d.h. Auswärts- und Heimspiel) des Achtelfinals gegen Real Madrid gewinnen muss, um es in das Viertelfinale zu schaffen. Sollte jede der Mannschaften genau eines der Spiele gewinnen, so wird das Weiterkommen per Elfmeterschiessen entschieden. Mit A und H bezeichnen sie das Ereignis, dass Manchester City das Auswärts- bzw Heimspiel gewinnt. Einem Online-Wettbüro entnehmen sie die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}(H) = \frac{2}{3}.$$

Kommt es zum Elfmeterschiessen, so gewinnt dies Manchester City mit Wahrscheinlichkeit 1/2. Ausserdem bezeichnen sie mit V das Ereignis, dass Manchester City das Viertelfinale erreicht.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass Manchester City das Viertelfinale *nach dem Elfmeterschiessen* erreicht, unter der Annahme, dass die Ereignisse A und H (stochastisch) unabhängig sind.

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass Manchester City das Viertelfinale erreicht, unter der Annahme, dass die Ereignisse A und H (stochastisch) unabhängig sind.

c) Das Auswärtsspiel resultiert in einem Sieg für Manchester City. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten, dass der Club das Viertelfinale erreicht bzw. nicht erreicht, gegeben dieses Ergebnis der Hinrunde, d.h. bestimme $\mathbb{P}(V|A)$ und $\mathbb{P}(V^c|A)$.

d) Nehmen wir an, Manchester City hätte das Auswärtsspiel verloren. Wie gross wäre die Wahrscheinlichkeit, dass der Club dennoch ins Viertelfinale kommt, d.h. wie gross ist $\mathbb{P}(V|A^c)$?

Lösung:

a) Sei E das Ereignis, dass Manchester City das Elfmeterschiessen gewinnt. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit der disjunkten Ereignisse $A^c \cap H \cap E$ und $A \cap H^c \cap E$. Mit Hilfe der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{Manchester City erreicht das VF nach dem Elfmeterschiessen}) = \\
&= \mathbb{P}\left((A^c \cap H \cap E) \cup (A \cap H^c \cap E)\right) = \\
&= \mathbb{P}(A^c \cap H \cap E) + \mathbb{P}(A \cap H^c \cap E) = \\
&= \mathbb{P}(E|A^c \cap H)\mathbb{P}(A^c \cap H) + \mathbb{P}(E|A \cap H^c)\mathbb{P}(A \cap H^c) = \\
&= \mathbb{P}(E|A^c \cap H)\mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(E|A \cap H^c)\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(H^c) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{18}.
\end{aligned}$$

b) Sei $\tilde{E}$ das Ereignis aus Aufgabe a), dann kann das Ereignis V disjunkt zerlegt werden als

$$V = (A \cap H) \cup \tilde{E}.$$

Siehe nächste Seite!

Somit ergibt sich

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(A \cap H) + \mathbb{P}(\tilde{E}) = \frac{1}{3}\frac{2}{3} + \frac{5}{18} = \frac{1}{2}.$$

c)

$$\mathbb{P}(V|A) = \frac{\mathbb{P}(V \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}((A \cap H) \,\dot\cup\, (A \cap H^c \cap E))}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{2}{9} + \frac{1}{18}}{\frac{1}{3}} = \frac{5}{6},$$

$$\mathbb{P}(V^c|A) = 1 - \mathbb{P}(V|A) = \frac{1}{6}.$$

d)

$$\mathbb{P}(V|A^c) = \frac{\mathbb{P}(V \cap A^c)}{\mathbb{P}(A^c)} = \frac{\mathbb{P}(A^c \cap H \cap E)}{\mathbb{P}(A^c)} = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}.$$